

Od Arystotelesa do Moora

Zenon Gniazdowski*

*** Autor pracuje w Instytucie Technologii Elektronowej w Warszawie oraz w Warszawskiej Wyższej Szkole Informatyki**

Od Arystotelesa do Moora

- **Motywacja**
- **Logika**
- **Algebra logiki**
- **Teoria układów logicznych (cyfrowych)**
- **Technologia układów logicznych**
- **Wnioski**

Logika

Pojęcie logika pochodzi od greckiego *λογος* czyli *słowo*.

Problematyka logiczna występuje u Sokratesa (469-399) i jego ucznia Platona (427-347).

Logika

Arystoteles (384 – 322 p.n.e.):

- Znał prawo wyłączonego środka oraz prawo sprzeczności, a więc znał pojęcie prawdy i fałszu.
- Zbudował pierwszy system logiki formalnej (zwany *sylogistyką*), który służył dowodzeniu twierdzeń filozoficznych.
- Poprawność systemu Arystotelesa wykazał Jan Łukasiewicz.

Logika

Pierwszy system dwuwartościowej logiki zdań opracowali stoicy w III wieku p.n.e. Według nich każde zdanie jest prawdziwe, bądź fałszywe.

W logice stoików występują m.in. międzyzdaniowe spójniki „i”, „jeżeli ..., to ...” oraz „albo”, a także negacja „nie”

Logika

Okres średniowiecza na nowo odkrył logikę starożytną. Od XII wieku zaczęto dokładniej studiować na uniwersytetach naukę Arystotelesa, a z nią jego logikę.

Do rozpowszechnienia logiki przyczynił się św. Albert Wielki (XIII w.), św. Tomasz z Akwinu (XIII w.) oraz współczesny im Piotr Hiszpan.

Na nowo odkryto prawa rachunku zdań (W. Ockham, XIV w.).

Logika

Logika w wiekach późniejszych:

Po średniowieczu w logice nastąpił zastój.

W 1787 roku Kant ubolewał, że „logika formalna nie zrobiła ani kroku naprzód i zdaje się być doktryną zamkniętą i kompletną”.

W XIX i na początku XX wieku nastąpił burzliwy rozwój logiki: Boole, De Morgan, Frege, Peano, ale także warszawska szkoła logiczna.

Logika

Warszawska szkoła logiczna:

W okresie międzywojennym uczniowie Kazimierza Twardowskiego tworzą warszawską szkołę logiczną.

Kazimierz Twardowski (1866-1938) urodził się w Wiedniu. Tam też studiował filozofię pod kierunkiem Franza Brentano, a także zdobywał stopnie naukowe. W 1895 r. zostaje mianowany profesorem filozofii we Lwowie.

Logika

Warszawska szkoła logiczna:

Największe nazwiska to: Jan Łukasiewicz,
Stanisław Leśniewski, Adolf Lindenbaum,
Alfred Tarski, Zygmunt Janiszewski,
Stanisław Jaśkowski, Mordchaj Wajsberg.

Liderami byli Łukasiewicz, Leśniewski oraz
Tarski.

Logika

Warszawska szkoła logiczna:

Logicy ze szkoły warszawskiej dokonali odkryć logicznych o światowym znaczeniu (np. Łukasiewicz – logika trójwartościowa, Tarski – teoria prawdy).

W latach trzydziestych XX w. Warszawę określano jako najważniejsze światowe centrum logiki.

Logika

Warszawska szkoła logiczna:

Jan Łukasiewicz (1878-1956). Uczeń Kazimierza Twardowskiego. Studiował we Lwowie, w Berlinie i Louvain. W okresie międzywojennym profesor (dwukrotnie także rektor) w UW. Po wojnie profesor logiki w Royal Irish Academy w Dublinie.

Do najbardziej znanych osiągnięć Łukasiewicza należą m.in. logiki wielowartościowe i modalne oraz beznawiasowa symbolika logiczna (Symbolika Łukasiewicza).

Logika

Warszawska szkoła logiczna:

Stanisław Leśniewski (1886-1939). Uczeń Kazimierza Twardowskiego. Studiował we Lwowie, w Lipsku, Zurychu, Heidelbergu i Monachium. W okresie międzywojennym profesor w UW.

Leśniewski jest autorem kilku oryginalnych systemów logiki (tzw. Systemy Leśniewskiego), stanowiących rozszerzenia lub ujęcia alternatywne względem klasycznych ujęć teorii mnogości, rachunku zdań i rachunku nazw.

Logika

Warszawska szkoła logiczna:

Alfred Tarski (1901-1983). Studiował w UW pod kierunkiem Łukasiewicza i Leśniewskiego. W 1939 znalazł się w USA. Od 1942 był wykładowcą matematyki w University of California (Berkeley).

Do bardziej znanych osiągnięć Tarskiego należą m.in. definicje prawdy, definiowalności, modelu, konsekwencji logicznej.

Logika

Warszawska szkoła logiczna:

Alfred Tarski stał się najszerzej znanym w świecie logikiem XX wieku. Do jego prac odnosili się nie tylko logicy, i matematycy, lecz także filozofowie, lingwiści i in.

Algebra logiki

Algebra logiki:

George Boole wraz z Augustem De Morganem uważani są za twórców algebry logiki, zwanej algebrą Boola.

Algebra logiki

Algebra logiki:

August De Morgan (1806 - 1871), profesor w Londynie. W wydanej w roku 1847 książce pt. *Formal Logic* przełamał nieufność do stosowania w logice metod matematycznych.

Algebra logiki

Algebra logiki:

**George Boole (1815 - 1864), profesor w
Cork, autor *The Mathematical Analysis of
Logic* (1847 r.), oraz *An Investigation of
The Laws of Thought* (1854 r.).**

Algebra logiki

Algebra logiki:

Boole jako pierwszy dostrzegł podobieństwo pomiędzy logiką zdań, a prawami arytmetyki.

- Podjął próbę zbudowania logiki formalnej, posługując się językiem algebry liczb (arytmetyki).
- Pierwszy stworzył wygodną symbolikę, wzorowaną na algebrze. Stąd nazwa: algebra logiki, ale także algebra Boola.

Algebra logiki

LOGIKA	ALGEBRA BOOLE'A
W języku logiki mówi się o zdaniach.	Język algebry Boola posługuje się pojęciem zmiennej
Zdanie jest fałszywe albo prawdziwe.	Zmienna może przyjąć jedną z dwóch wartości: zero albo jeden
Zdanie można zaprzeczyć: zaprzeczone zdanie prawdziwe stanie się zdaniem fałszywym i odwrotnie – zaprzeczone zdanie fałszywe stanie się zdaniem prawdziwym.	Zmienną można zanegować: zanegowana zmienna równa 1 przyjmie wartość 0 – zanegowana zmienna równa 0 przyjmie wartość 1.
Dwa zdania połączone spójnikiem „i” nazywane są koniunkcją zdań. Koniunkcja jest prawdziwa tylko wtedy, gdy obydwa zdania składowe są jednocześnie prawdziwe.	Odpowiednikiem koniunkcji dwóch zdań w algebrze Boola jest ich iloczyn, który jest równy 1 tylko wtedy, gdy obydwie zmienne są jednocześnie równe 1.
Dwa zdania połączone spójnikiem „lub” nazywane są alternatywą zdań. Alternatywa jest prawdziwa wtedy, gdy co najmniej jedno ze zdań składowych jest prawdziwe.	Algebraicznym odpowiednikiem alternatywy dwóch zdań jest ich suma, która jest równa 1 tylko wtedy, gdy co najmniej jeden ze składników sumy jest równy 1.

Teoria układów logicznych

W r. 1937 Claude Shannon pisze pracę magisterską, którą publikuje w roku 1938. Tytuł tej pracy brzmi: “A Symbolic Analysis of Relay and Switching Circuits”.

Praca ta jest podstawą zastosowania algebry Boola do realizacji układów cyfrowych.

Shannon przedstawił tam przyjęty za Huntingtonem (1904), używany do dzisiaj w teorii układów logicznych system aksjomatów algebry Boola, a także m.in. opisał podstawy konstrukcji sumatora liczb dwójkowych.

Teoria układów logicznych

Claude Elwood Shannon (1916 – 2001) studiował w University of Michigan.

Doktorat obronił w MIT w 1940.

W latach 1936-40 pracował w MIT. W latach 1941-1972 pracował w Laboratoriach Bella.

Od 1958 r. był profesorem w MIT. Na emeryturę przeszedł w roku 1978.

Pod koniec życia chorował na chorobę Alzheimera.

Teoria układów logicznych

A SYMBOLIC ANALYSIS
OF
RELAY AND SWITCHING CIRCUITS

by

Claude Elwood Shannon
B.S., University of Michigan
1936

Submitted in Partial Fulfillment of the
Requirements for the Degree of
MASTER OF SCIENCE
from the
Massachusetts Institute of Technology
1940

Signature of Author _____

Department of Electrical Engineering, August 10, 1937

Signature of Professor
in Charge of Research _____

Signature of Chairman of Department
Committee on Graduate Students _____



Teoria układów logicznych

Aksjomaty algebry Boola:

Algebra Boola jest to niepusty zbiór A dowolnych elementów x, y, z, \dots , o następujących własnościach:

- W zbiorze A są dwa wyróżnione elementy: 0 oraz 1 ;
- Na elementach zbioru A są określone następujące operacje:

$$x + y, \quad x * y, \quad \overline{x}$$

Teoria układów logicznych

Aksjomaty algebry Boola:

Operacje w algebrze Boola spełniające następujący układ aksjomatów:

$$x + y = y + x$$

$$x + (y + z) = (x + y) + z$$

$$x + (y * z) = (x + y) * (x + z)$$

$$x + 0 = x$$

$$x + \bar{x} = 1$$

$$x * y = y * x$$

$$x * (y * z) = (x * y) * z$$

$$x * (y + z) = (x * y) + (x * z)$$

$$x * 1 = x$$

$$x * \bar{x} = 0$$

Teoria układów logicznych

Bramki logiczne:

Z definicji operacje negacji oraz “+” i “*” są konieczne i wystarczające do realizacji dowolnego wyrażenia boolowskiego.

Dlatego, w teorii układów logicznych konieczne i wystarczające bramki to:

- Bramka NOT – reprezentująca operację negacji**
- Bramka OR - reprezentująca operację “+”**
- Bramka AND - reprezentująca operację “*”**

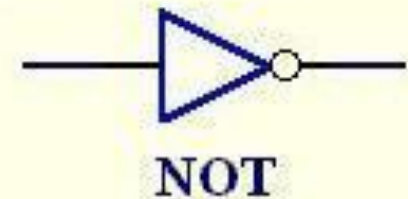
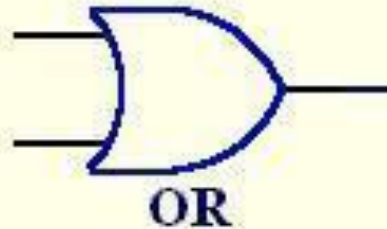
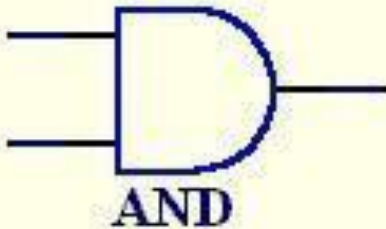
Teoria układów logicznych

Bramki logiczne:

a	b	$a * b$
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

a	b	$a + b$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

a	\bar{a}
0	1
1	0



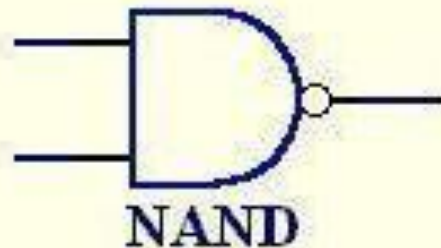
$$a * b = \min \{a, b\} \quad a + b = \max \{a, b\}$$

Teoria układów logicznych

Bramki uniwersalne:

a	b	$\overline{a * b}$
0	0	1
0	1	1
1	0	1
1	1	0

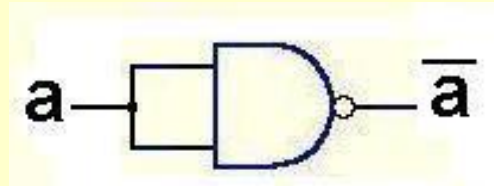
a	b	$\overline{a + b}$
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	0



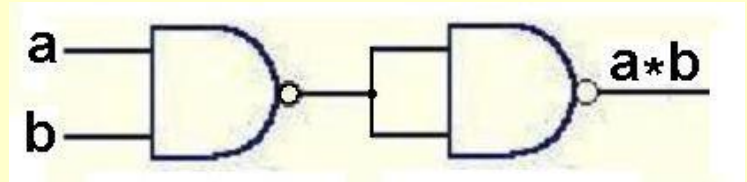
Teoria układów logicznych

Bramki uniwersalne:

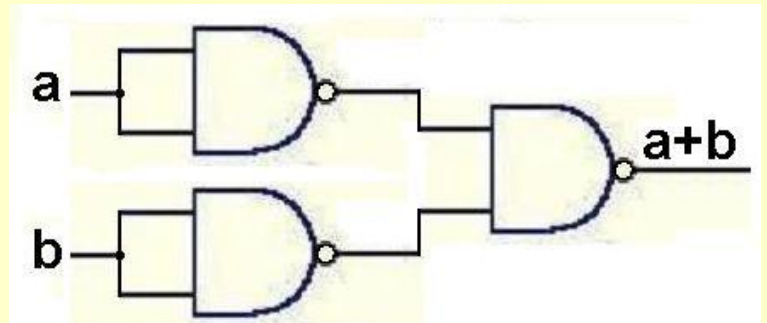
$$\bar{a} = \overline{a * a}$$



$$a * b = \overline{\overline{a * b}}$$



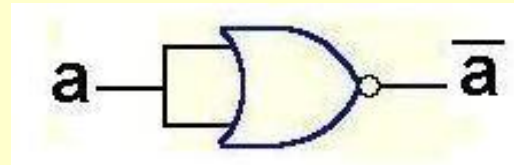
$$a + b = \overline{\overline{a + b}} = \overline{\overline{a} * \overline{b}}$$



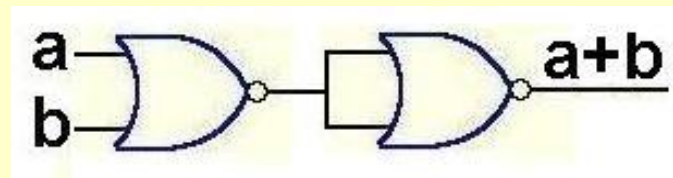
Teoria układów logicznych

Bramki uniwersalne:

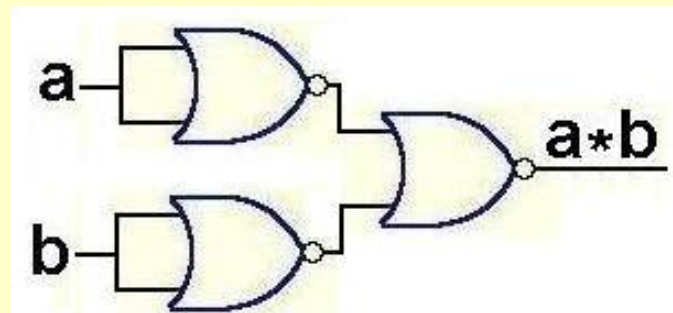
$$\overline{a} = \overline{a + a}$$



$$a + b = \overline{\overline{a + b}}$$



$$a * b = \overline{\overline{a * b}} = \overline{\overline{a + b}}$$



Teoria układów logicznych

A	B	F0	F1	F2	F3	F4	F5	F6	F7	F8	F9	F10	F11	F12	F13	F14	F15
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1
0	1	0	0	0	0	1	1	1	1	0	0	0	0	1	1	1	1
1	0	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1
1	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1

Bramki – wszystkie funkcje przemienne:

- F0, F15 – trywialne,
- F1, F14 – AND, NAND,
- F7, F8 – OR, NOR,
- F6, F9 – XOR, XNOR
 - F13 – implikacja – funkcja nie przemienne, więc nie jest to bramka logiczna

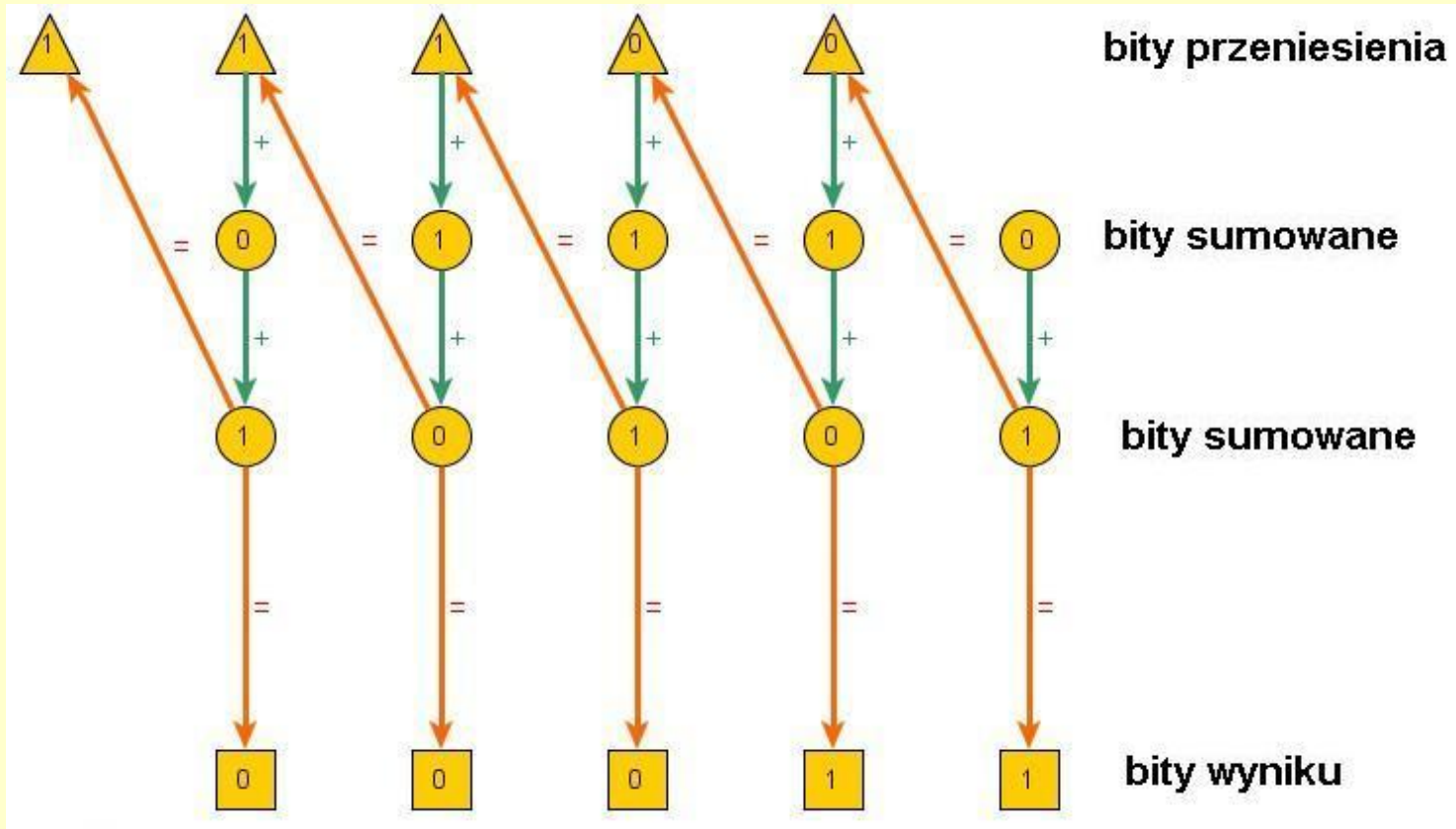
Teoria układów logicznych

Sumowanie liczb dwójkowych:

nadmiar							
↓							
1	1	1	0	0	←	przeniesienie z poprzedniego sumowania	
	0	1	1	1	0	← pierwsza sumowana liczba	
	1	0	1	0	1	← druga sumowana liczba	
	0	0	0	1	1	← wynik	

Teoria układów logicznych

Sumowanie liczb dwójkowych:



Teoria układów logicznych

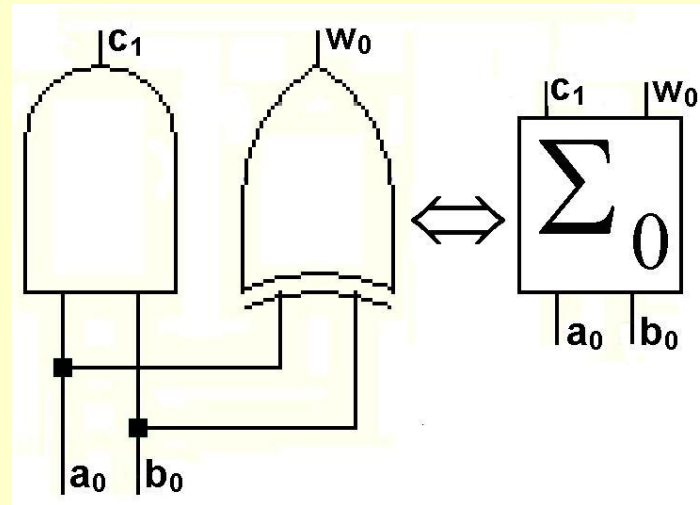
Sumowanie liczb dwójkowych:

Sumowanie bitów najmniej znaczących:

a_0	b_0	w_0	c_1
0	0	0	0
0	1	1	0
1	0	1	0
1	1	0	1

$$w_0 = \overline{a_0} * b_0 + a_0 * \overline{b_0} = a_0 \oplus b_0$$

$$c_1 = a_0 * b_0$$



Teoria układów logicznych

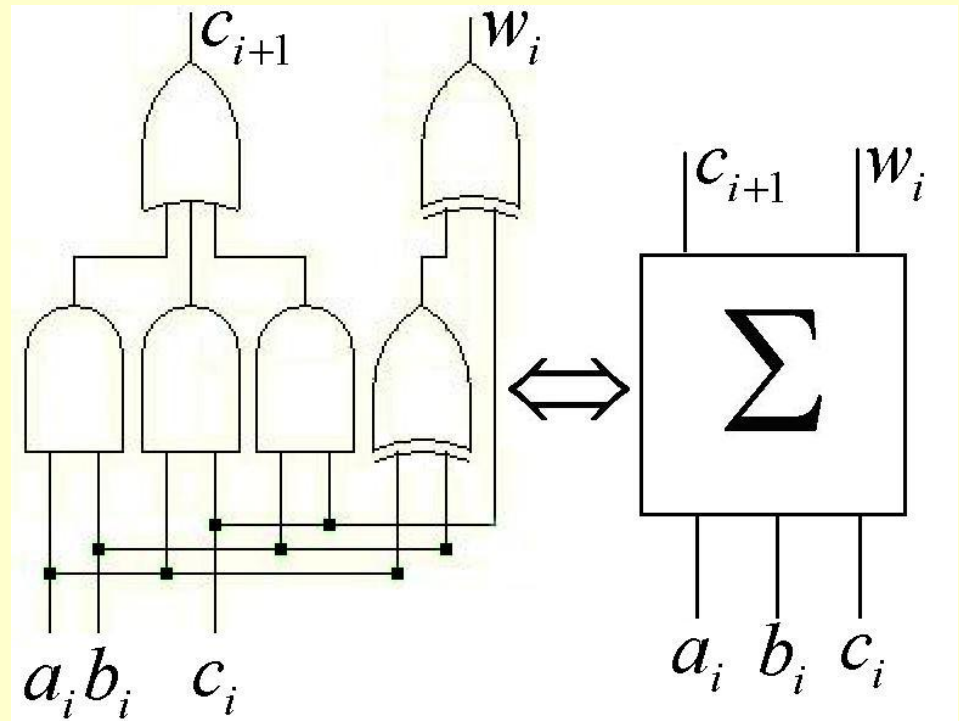
Sumowanie liczb dwójkowych:

Sumowanie kolejnych bitów:

a_i	b_i	c_i	w_i	c_{i+1}
0	0	0	0	0
0	0	1	1	0
0	1	0	1	0
0	1	1	0	1
1	0	0	1	0
1	0	1	0	1
1	1	0	0	1
1	1	1	1	1

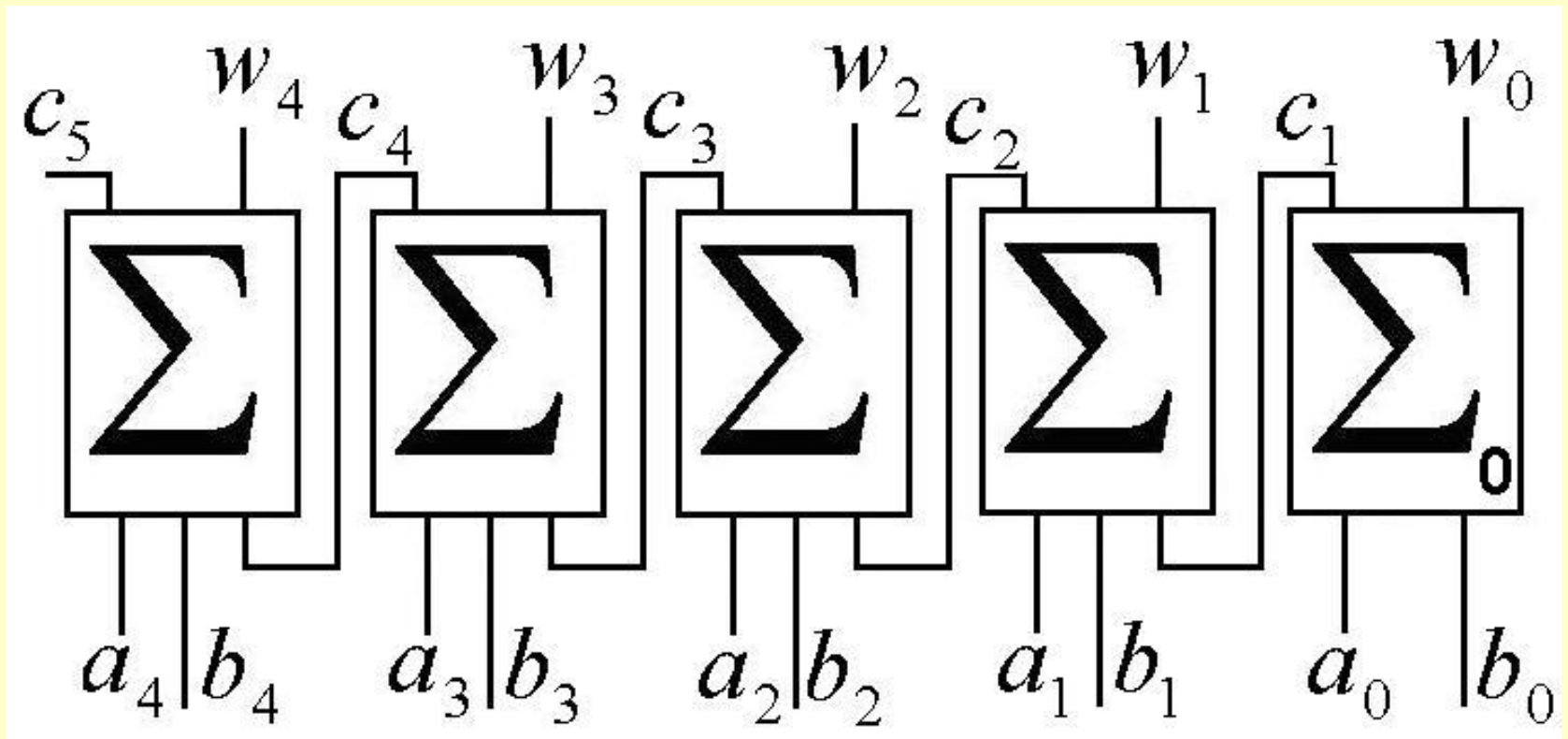
$$w_i = a_i \oplus b_i \oplus c_i$$

$$c_{i+1} = a_i * b_i + a_i * c_i + b_i * c_i$$



Teoria układów logicznych

Sumowanie liczb dwójkowych:



Teoria układów logicznych

Pierwsze wnioski:

- Na mocy aksjomatów algebry Boola operacje negacji oraz sumy i iloczynu są konieczne i wystarczające do realizacji dowolnego wyrażenia boolowskiego.
- Operacje te realizowane są przez bramki logiczne odpowiednio NOT oraz OR i AND.
- Bramki NOT oraz OR i AND (konieczne i wystarczające) można zastąpić jednym typem bramki uniwersalnej NAND albo NOR.
- W elektronicznej realizacji bramek zmienne boolowskie równe zero lub jeden reprezentowane są przez właściwe poziomy napięcie.
- Z bramek tych można m.in. stworzyć całą logiczną strukturę mikroprocesora.

Technologia układów logicznych

Historia:

- Lata 40-te XX w. pierwsze maszyny liczące (kalkulatory, komputery?) – technologia: lampy, przekaźniki, przełączniki
- Rok 1946 - John von Neumann (1903-1957), proponuje architekturę, według której są budowane komputery do dnia dzisiejszego.

Technologia układów logicznych

Maszyna von Neumana

Elementy składowe:

- pamięć złożona z komórek pamiętających stany 0 i 1,
- arytmometr wykonujący działania arytmetyczno-logiczne,
- jednostka sterująca.

Sterowanie odbywało się za pomocą programu, który był umieszczany w pamięci.

Technologia układów logicznych

Maszyna von Neumana

Koncepcja programu:

- Program mógł modyfikować zawartość pamięci,
- Składał się z ciągu instrukcji, które były pobierane i rozpoznawane przez jednostkę sterującą w takt zegara.
- Instrukcje odpowiadały poleceniom zakodowanym w układzie elektronicznym.

Technologia układów logicznych

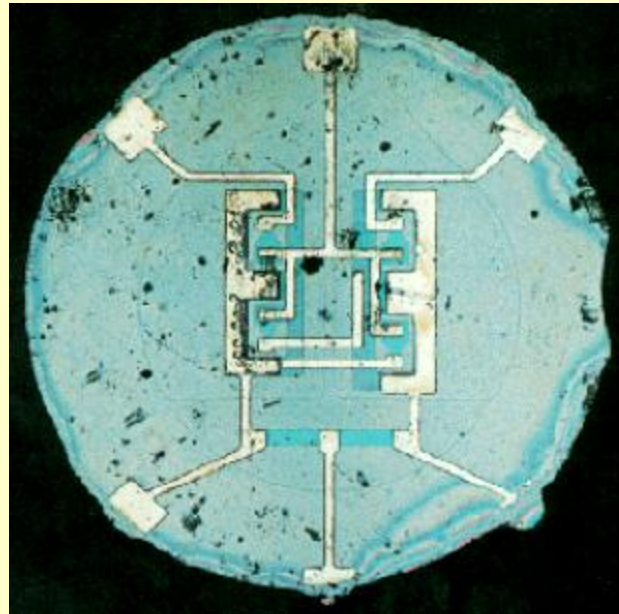
Historia:

- **1947: Shockley, Brattain i Bardeen odkrycie tranzystora**
- **Rok 1958-59 – koncepcje układu scalonego – Kilby (TI) oraz Noyce (Fairchild)**

Technologia układów logicznych

Historia:

Pierwszy planarny układ scalony (1961 r.)

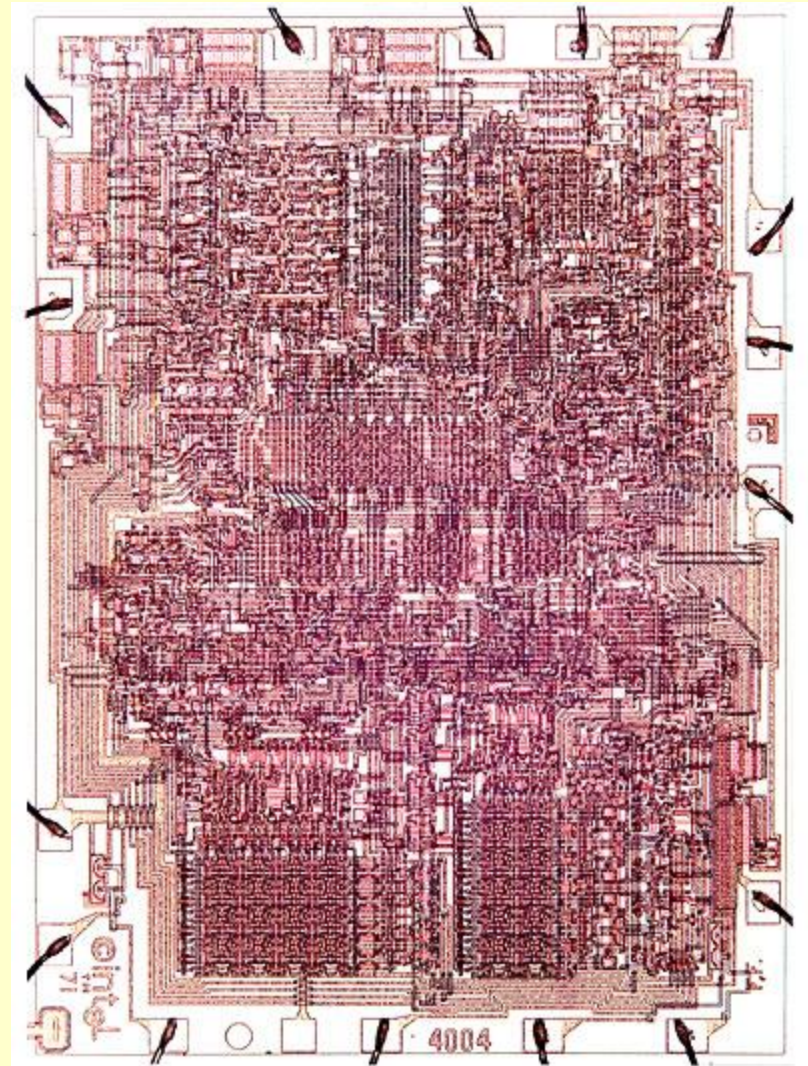


Źródło: http://download.intel.com/research/silicon/Gordon_Moore_ISSCC_021003.pdf

Technologia układów logicznych

Historia:

- Rok 1971: Intel wprowadza na rynek 4-bitową jednostkę 4004 – jest to pierwszy mikroprocesor.
- ...



Technologia układów logicznych

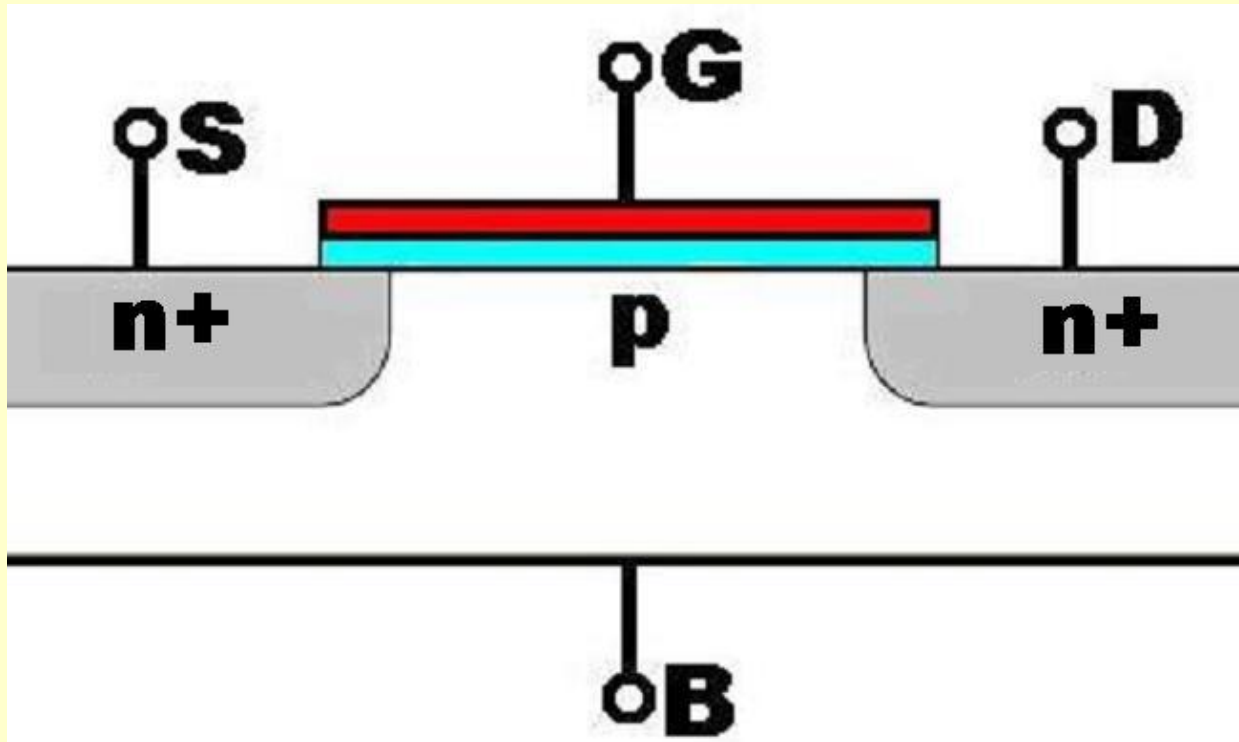
Pierwsze mikroprocesory firmy Intel były wykonywane w technologii PMOS

W roku 1974 procesor 8080 wykonano w technologii NMOS

Od roku 1976 (procesor 8085) zaczęto stosować technologię CMOS

Technologia układów logicznych

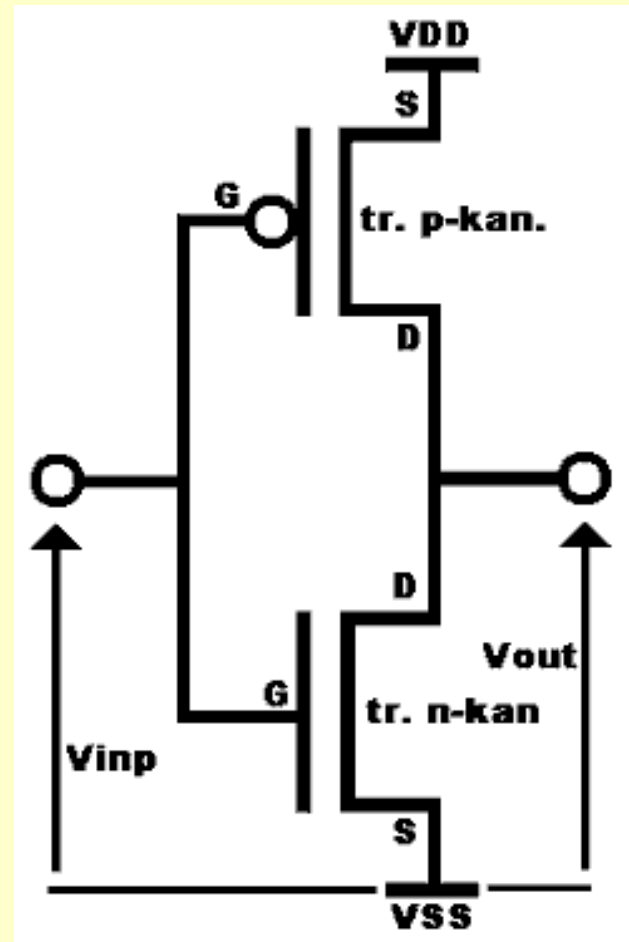
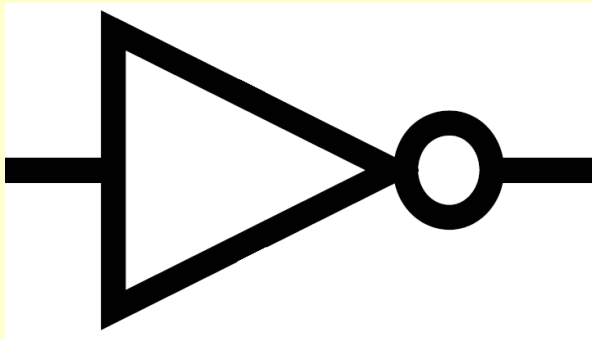
Tranzystor MOS n-kanalowy



(MOS = Metal Oxide Semiconductor)

Technologia układów logicznych

Technologia CMOS: – Inwerter CMOS

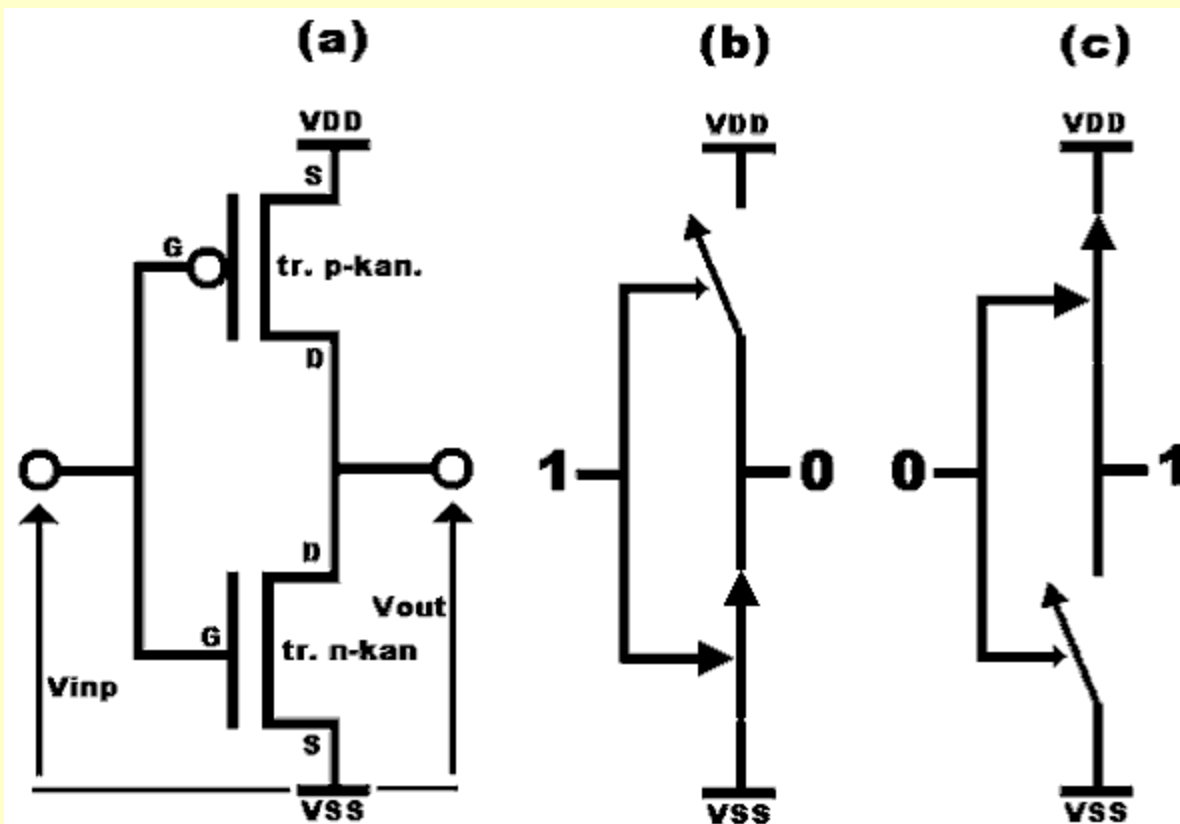


(CMOS = Complementary MOS)

Technologia układów logicznych

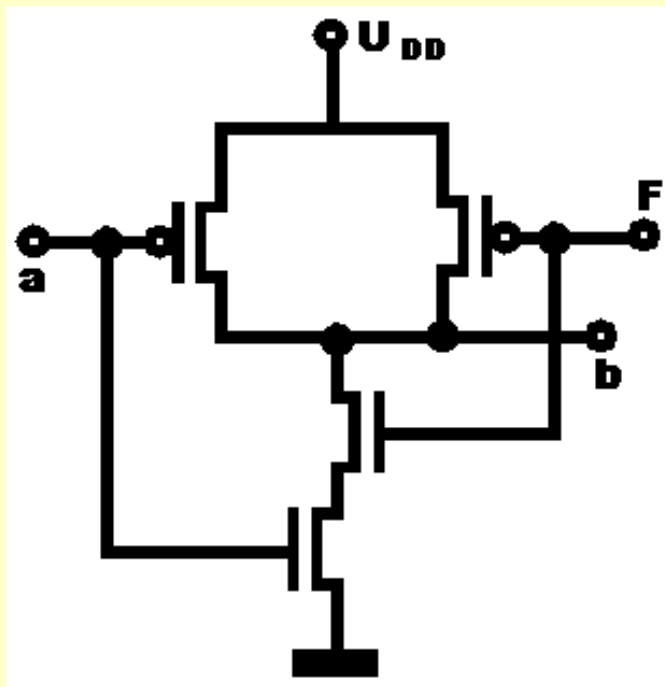
Technologia CMOS:

– Inwerter CMOS

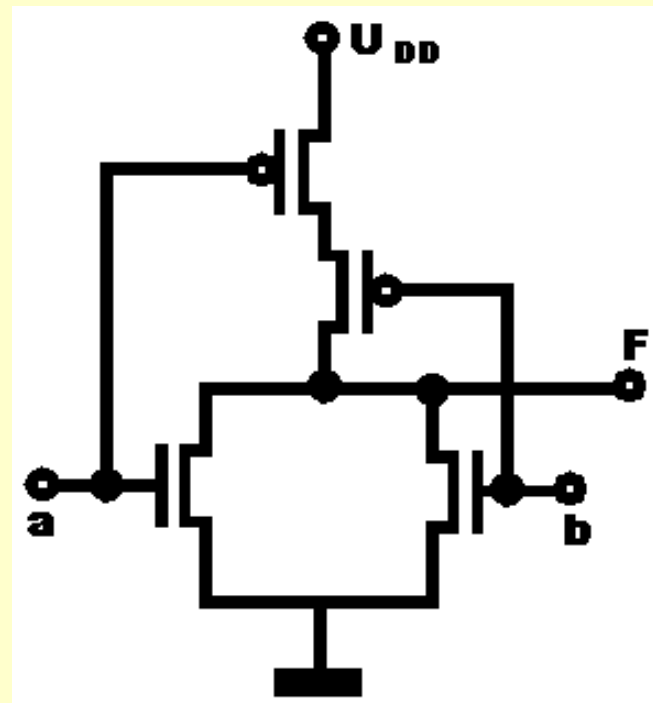


Technologia układów logicznych

Technologia CMOS:



Bramka NAND (2 we.)

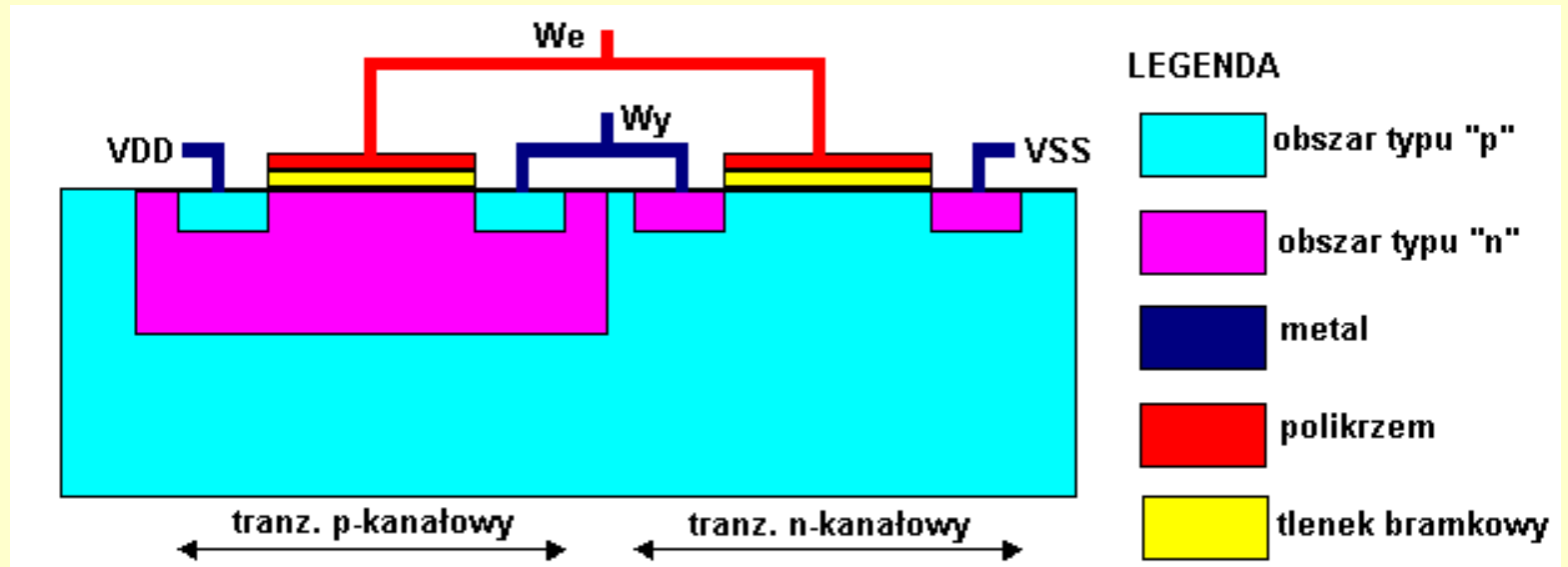


Bramka NOR (2we.)

Technologia układów logicznych

Technologia CMOS:

Uproszczony przekrój inwertera CMOS z bramką polikrzemową



Technologia układów logicznych

Pojęcie reguł projektowania:

W danych katalogowych pojawia się informacja, że procesor wykonano np. w technologii $0.09\mu\text{m}$.

Lub: procesor wykonano w regułach projektowania $0.09\mu\text{m}$.

Albo: procesor wykonano w technologii o wymiarze charakterystycznym $0.09\mu\text{m}$.

Technologia układów logicznych

Pojęcie reguł projektowania:

Tranzystor MOS jest projektowany jako struktura o określonej długości (L) oraz szerokości (W).

Z drugiej strony, w samym tranzystorze MOS można wyodrębnić warstwy leżące jedna nad drugą (definiujące tranzystor). Dla przykładu, obszar bramki znajduje się nad obszarem aktywnym.

Technologia układów logicznych

Pojęcie reguł projektowania:

Przez wymiar charakterystyczny danej technologii rozumie się najmniejszy dopuszczalny rozmiar projektowanej warstwy: minimalna długość lub szerokość kanału tranzystora, minimalny odstęp pomiędzy dwoma obszarami (np. pomiędzy dwoma ścieżkami metalizacji), minimalna wielkość zakładki jednej warstwy nad drugą (minimalna zakładka metalu bramki nad obszarem aktywnym).

Wymiar charakterystyczny jest miarą dojrzałości danej technologii.

Technologia układów logicznych

Skalowanie:

Pierwsze procesory Intela (technologia PMOS) wytwarzano w technologii $10\mu\text{m}$.

Procesor 8080 (NMOS – 1974 r.) wykonano w technologii $6\mu\text{m}$.

Procesor 8085 (CMOS – 1976) wykonano w technologii $3\mu\text{m}$. Od tamtej pory wymiar charakterystyczny systematycznie malał: Od roku 2006 wymiar charakterystyczny technologii wynosi $0.065\mu\text{m}$.

Technologia układów logicznych

Skalowanie:

Celowe zmniejszanie rozmiarów elementów w układzie scalonym nazywa się skalowaniem.

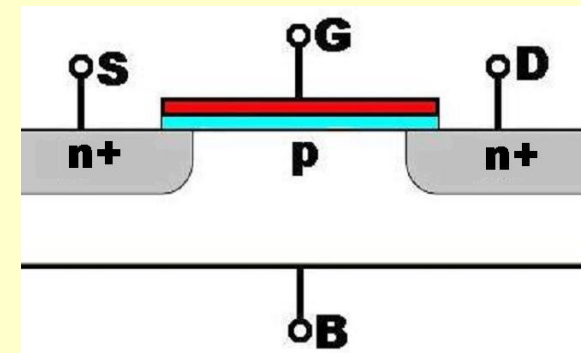
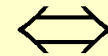
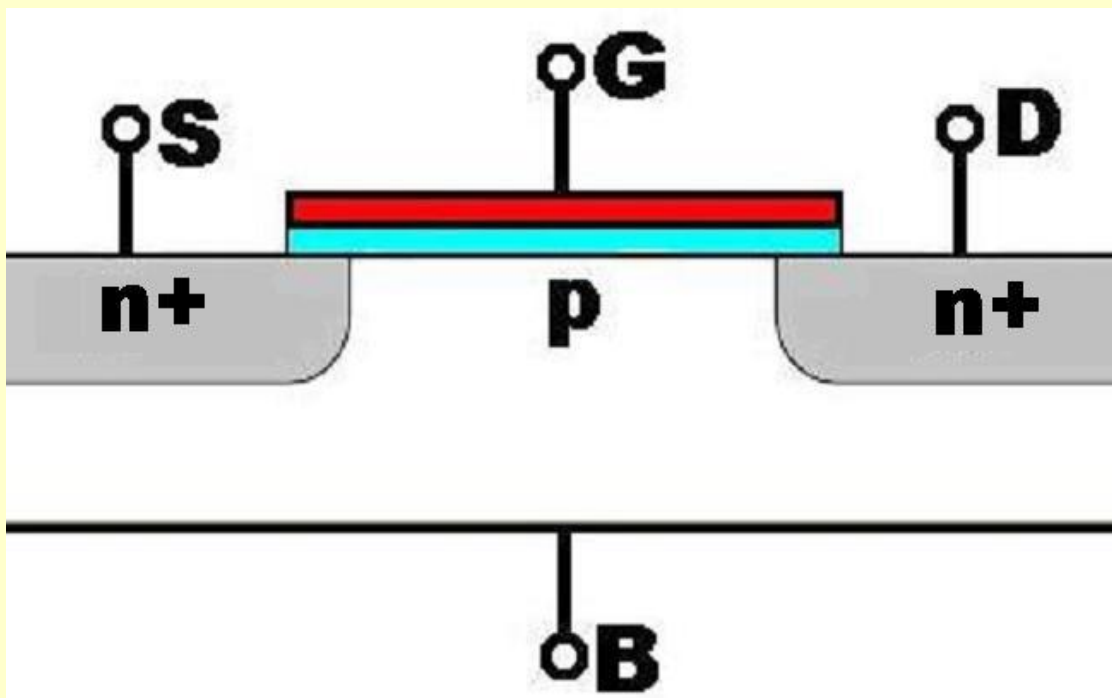
Celem skalowania jest:

- Zmniejszenie przyrządów, zwiększenie upakowania
- Poprawienie ich parametrów funkcjonalnych
- Obniżenie kosztów.

Technologia układów logicznych

Skalowanie:

Współczynnik skalowania S wynosi 0.5



Technologia układów logicznych

Skalowanie:

Dla współczynnika skalowania S :

- Szerokość kanału (ścieżki): $W * S$
- Długość kanału: $L * S$
- Głębokość złącza: $x_j * S$
- Koncentracja w podłożu: $N_a * S$
- Grubość tlenku bramkowego: $t_{ox} * S$
- Napięcie: $V * S$

Technologia układów logicznych

Skalowanie:

Rezultaty skalowania:

- Większa gęstość upakowania: $1/S^2$
- Większa szybkość: $1/S$
- Mniejsza moc w tranzystorze: $1*S^2$

Technologia układów logicznych

Prawo Moora:

Skutki skalowania opisuje prawo Moora.

Wzrost upakowania liczby tranzystorów na strukturze procesora (ogólniej – układu scalonego) da się opisać przy pomocy prawa sformułowanego w roku 1965 przez Gordona Moora, współzałożyciela firm Fairchild oraz Intel.

Technologia układów logicznych

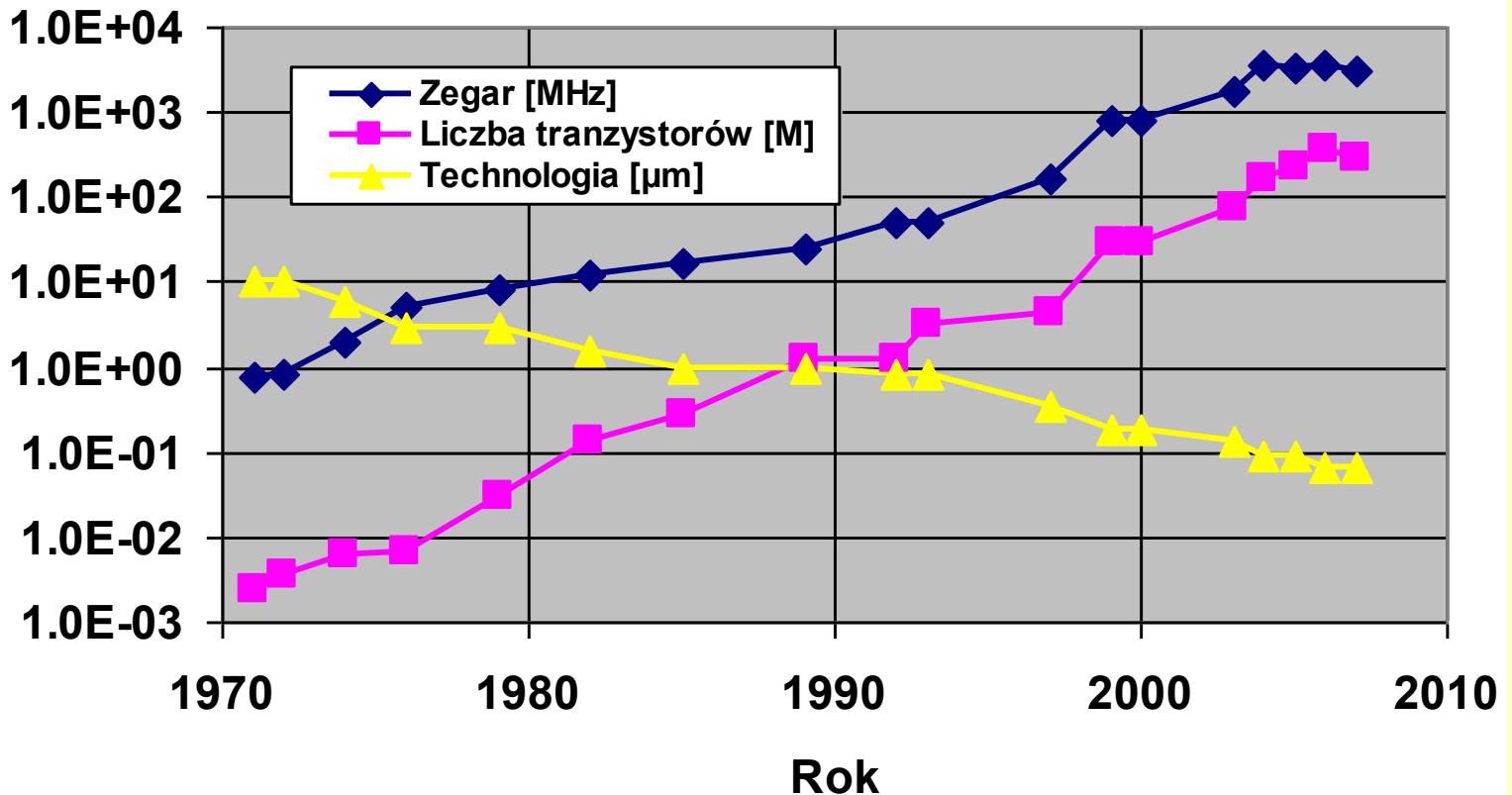
Prawo Moora:

Szacuje się, że liczba elementów na strukturze układu scalonego podwaja się corocznie.

Wniosek: wzrost upakowania układów scalonych jako wykładniczą funkcję czasu!

Technologia układów logicznych

Prawo Moora



Technologia układów logicznych

Prawo Moora:

Podsumowanie – za okres od roku 1971 do roku 2006

- Częstotliwość zegara wzrosła około 5000 razy: od 740kHz do 3.6GHz
- Liczba tranzystorów w układzie wzrosła ponad 150 000 razy: od 2 300 do prawie 400 000 000
- Wymiar charakterystyczny zmalał ponad 150 razy: od 10 μ m do 0.065 μ m – daje to prawie 250 000 krotny spadek powierzchni pojedynczego tranzystora

Technologia układów logicznych

Prawo Moora:

Podsumowanie – cd.

- Grubość tlenku bramkowego zmalała ponad 80 razy: od 100nm do około 1.2nm dla technologii 0.09 μ m – jest to grubość nie większa niż 5 warstw atomowych!
- Koszt pojedynczego tranzystora zmalał ponad 10 000 000 razy.

Technologia układów logicznych

Prawo Moora:

Czy to już koniec prawa Moora?

- Grubość tlenku bramkowego dla technologii $0.09\mu\text{m}$ wynosi 1.2 nm, czyli nie więcej niż 5 warstw atomowych.

Technologia układów logicznych

Prawo Moora:

Co dalej?

- Rewolucyjna zmiana technologii?
- Zmiany w konstrukcji tranzystora?
- Zamiana SiO_2 na dielektryk o dużej stałej dielektrycznej k .
- Zastosowanie naprężonego krzemu

Technologia układów logicznych

Prawo Moora:

Co dalej?

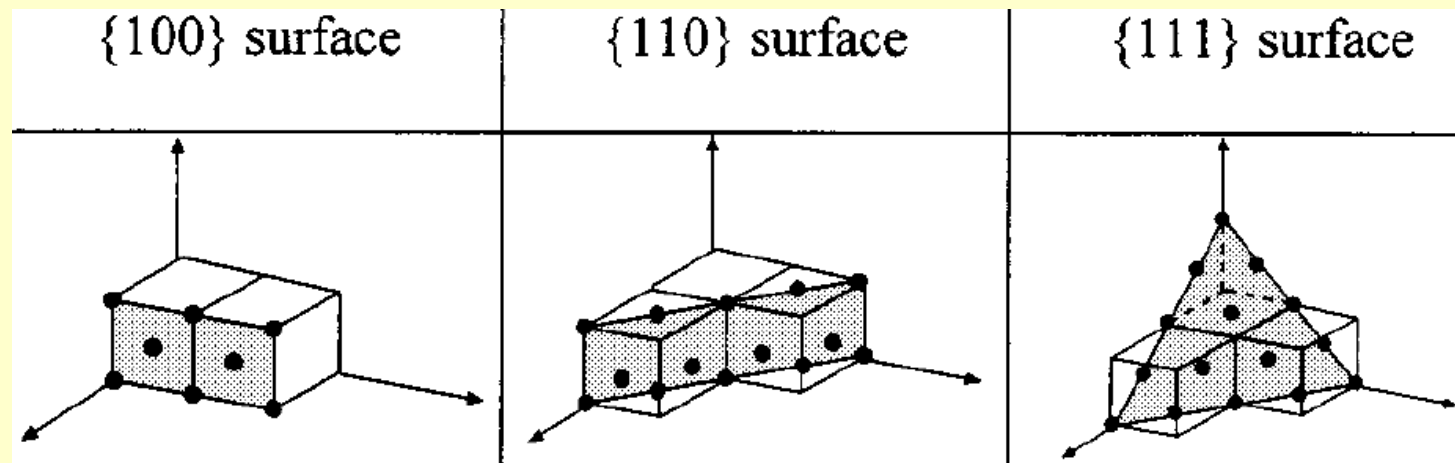
- Zamiana SiO_2 na dielektryk o dużej stałej dielektrycznej k spowoduje, że uzyska się mały współczynnik EOT (equivalent oxide thickness)

Technologia układów logicznych

Prawo Moora:

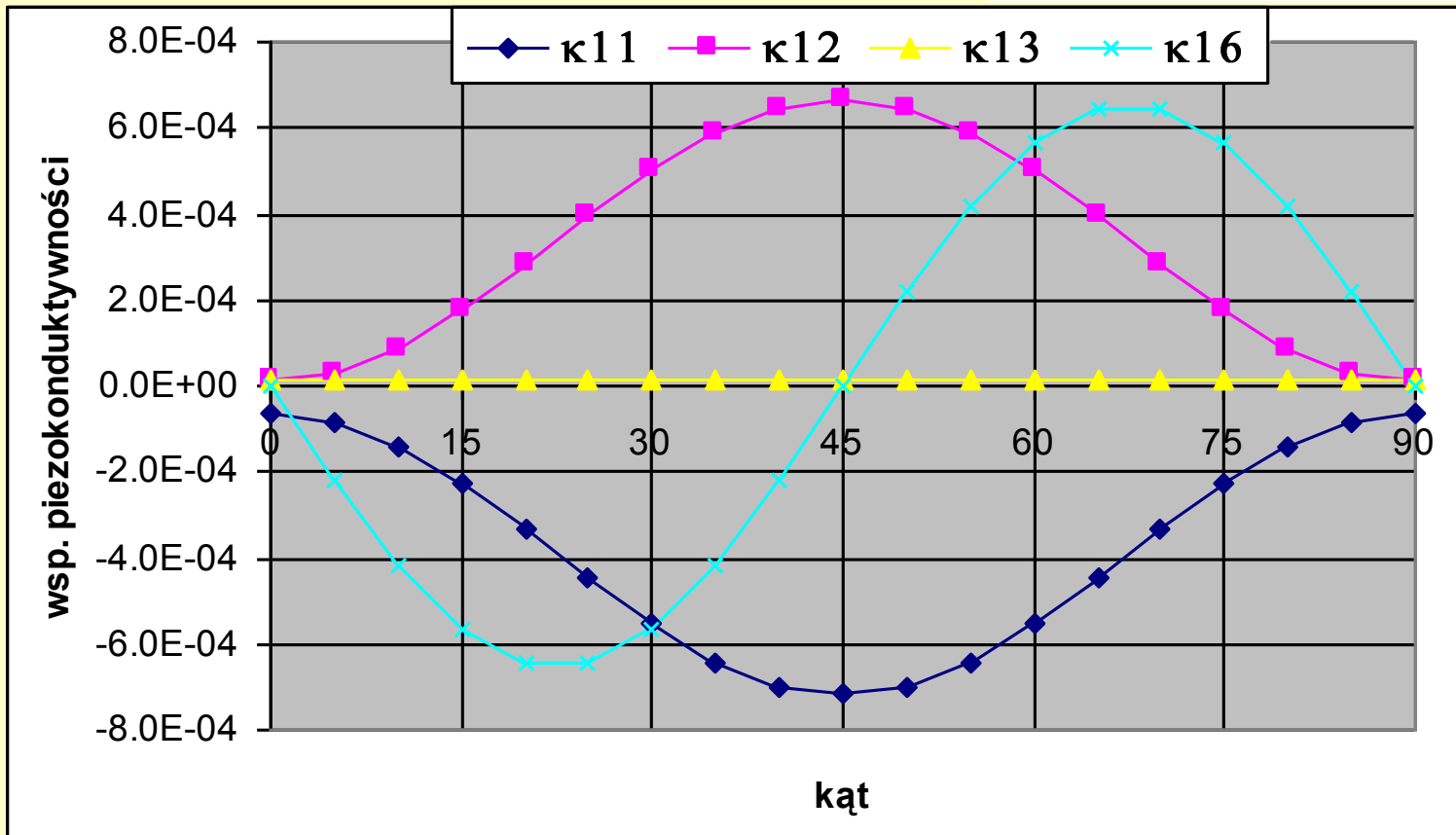
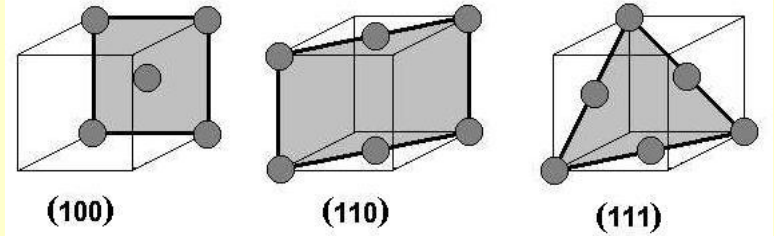
Co dalej?

- Zastosowanie naprężonego krzemu: przewodność w kanale tranzystora MOS anizotropowo zależy od naprężeń:



Technologia układów logicznych

Naprężony krzem:



Wnioski

- Algebra Boola jest matematycznym modelem logiki zdań, jednocześnie jest podstawą opisu działania układów logicznych (cyfrowych)
- Korzenie komputera są umocowane w logice, a przez to sięgają starożytności
- Rozwój technologii układów scalonych opisany jest przez prawo Moora
- Prawo Moora osiąga nasycenie

Wnioski

(...)

*Patrz, oto jest karczmy godło,
Koń malowany na płótnie;
Ja chcę mu wskoczyć na siodło,
A koń niech z kopyta utnie.
Skręć mi przy tym bicz z
piasku,
Żebym miał czym konia
chłostać,*

(...)

(...)

*Mefistofil duchem
skoczy,
Konia czyści, karmi, poi,
Potem bicz z piasku
utoczy
I już w gotowości stoi.
(...)*

Wnioski

Twardowski miał nadzieję, że nawet diabeł nie potrafi sprostać jego wyzwaniu – bicz z piasku jest symbolem niemożliwego do zrealizowania.

Tymczasem, Mefisto zadanie wykonał.

Ale czy potrzeba aż czartowskiej mocy, aby ukręcić bicz z piasku?

Opisane możliwości technologii krzemowej dowodzą tego, że współczesny człowiek potrafi zrobić znacznie więcej niż tylko bicz z piasku.

Niestety, nasycanie się prawa Moora wskazuje, że tu kończą się możliwości rozwoju – potrzeba rewolucji albo pozostanie korzystanie z dojrzałych owoców technologii krzemowej