Wprowadzenie do logiki

Andrzej Szałas

MODELOWANIE

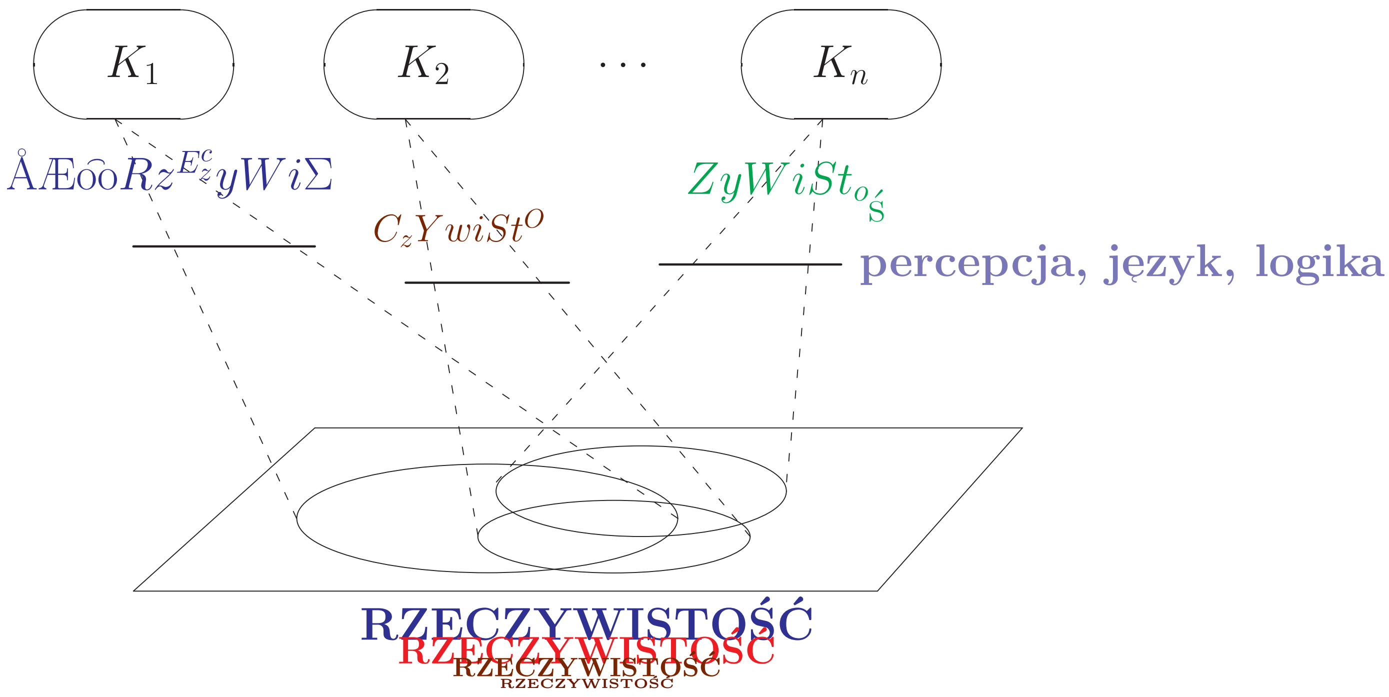
Dobry *model* to mniej lub bardziej uproszczony opis rzeczywistości, prowadzący do wniosków dobrze tę rzeczywistość oddających (przybliżających).
Dąży się do doboru możliwie najprostszych formalnych środków dla opisu modelu na danym poziomie uproszczenia.

Przykład

Model samochodu:

- z punktu widzenia kierowania samochodem:
  kierownica, pedały, drążek biegów, starter, przyciski włączania świateł, wycieraczek, migaczy itp.
- z punktu widzenia projektowania: np. model przepływów aerodynamicznych, modele wytrzymałości materiałów i części
- z punktu widzenia prowadzenia pojazdu na drodze: modele sytuacji drogowych.

Środowiska systemów inteligentnych



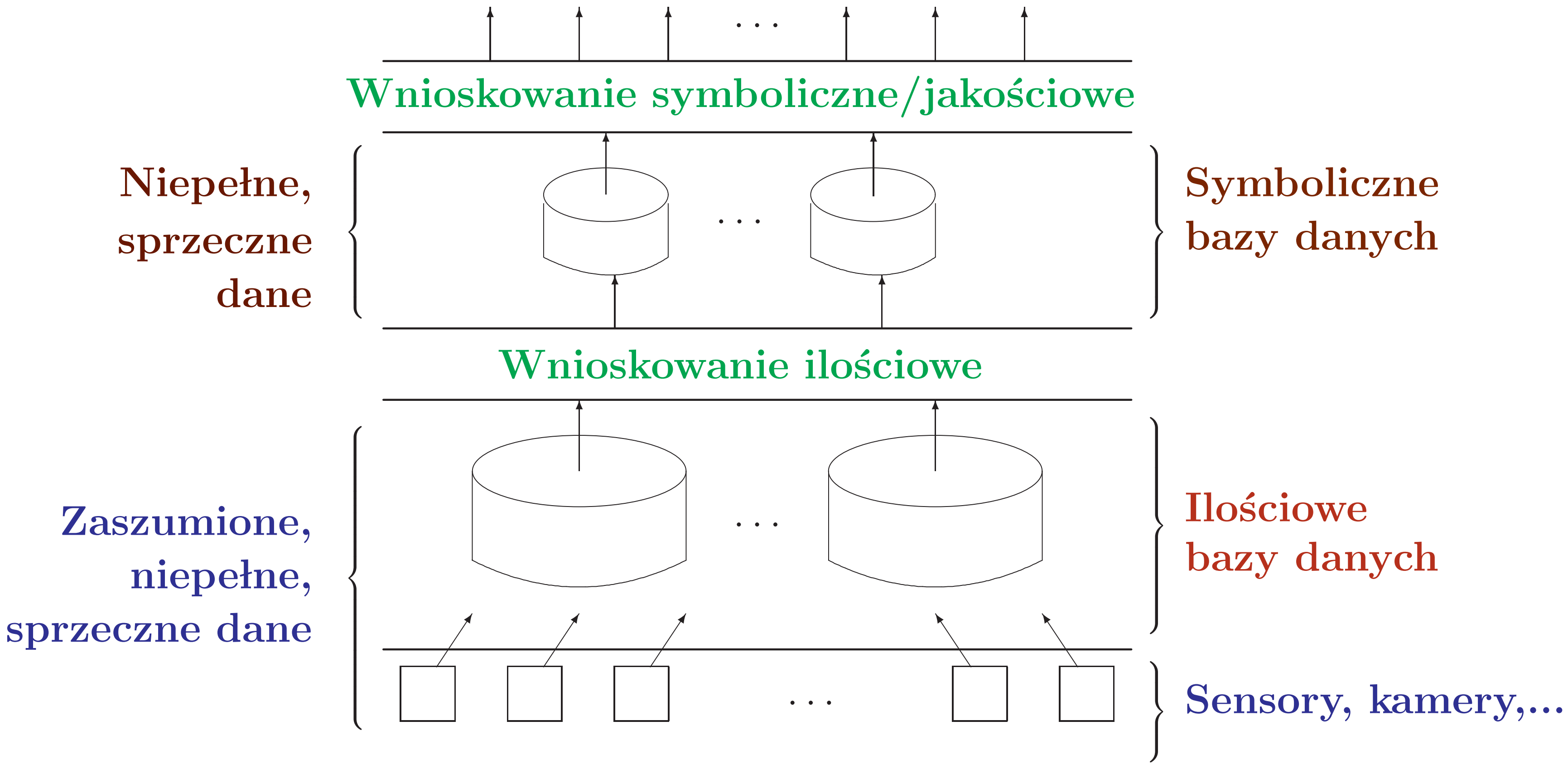
Wnioskowanie ilościowe

- metody algorytmiczne
- metody analityczne/numeryczne
- metody probabilistyczne
- logika rozmyta

Wnioskowanie symboliczne

- logika klasyczna/programowanie w logice
- logiki trój- i wielowartościowe
- logiki modalne
- wnioskowanie aproksymacyjne
- wnioskowanie niemonotoniczne

OD SENSORÓW DO WNIOSKOWANIA SYMBOLICZNEGO



Czym są logiki?

Logika (w przybliżeniu) to widzenie świata przez pryzmat stopnia prawdziwości własności (formuł) wyrażonych w danym języku o dobrze zdefiniowanej składni i precyzyjnej semantyce (znaczeniu).

$$\begin{array}{lll} \text{Logika} & \approx \text{język} + \text{semantyka/modele} & \text{(semantycznie)} \\ & \approx \text{język} + \text{metoda wnioskowania} & \text{(syntaktycznie)} \end{array}$$

©A. Szałas

Modelowanie w logikach

- ustalamy język formalny (słownik, składnia)
- ustalamy mechanizmy poprawnego wnioskowania
- opisujemy rzeczywistość w wybranym języku – uzyskujemy model
- testujemy model – wnioskujemy o własnościach opisanej rzeczywistości
- badamy rzeczywistość wyłącznie przez pryzmat stopnia prawdziwości wyrażonych własności

Ustalenie języka

Język dostosowuje do się danej dziedziny zastosowań. Na przykład

1. mówiąc o polityce używamy pojęć takich, jak:
„partia polityczna”, „premier”, „parlament”, „program”, itd.
2. mówiąc o zjawiskach występujących w informatyce używamy pojęć takich, jak „system informatyczny”, „baza danych”, „program”, itd.

Używamy różnych słowników pojęć, choć niektóre pojęcia mogą się nakładać, czasem mając inne znaczenie.

Język logiki

Język logiki definiuje się zaczynając od pojęć podstawowych, spójników i operatorów logicznych oraz formuł.
Spójniki i operatory logiczne mają ustalone znaczenie.
Słowniki odzwierciedlające konkretne dziedziny zastosowań zmieniają się.

ELEMENTY JĘZYKA LOGIKI

- *stałe indywiduowe* (*stałe*), reprezentujące pewne *obiekty* – przykłady: $0, 1, Jan$
- *zmienne indywiduowe*, reprezentujące obiekty – przykłady: x, y, m, n
- *symbole funkcyjne*, reprezentujące funkcje, – przykłady: $+, *, ojciec()$

ELEMENTY JĘZYKA LOGIKI – CD.

- *stałe logiczne*: PRAWDA, FAŁSZ, czasem również inne,
  – przykłady: NIEZNANA, SPRZECZNOŚĆ
- *zmienne logiczne* (*zdaniowe*), reprezentujące wartości logiczne
  – przykłady: p, q
- *symbole relacyjne*, reprezentujące relacje,
  – przykłady: $=, \leq, \preceq$

Elementy języka logiki – cd.

- *spójniki zdaniowe* i *operatory*, pozwalające tworzyć bardziej skomplikowane formuły na podstawie formuł prostszych,
  – przykłady spójników: „i”, „lub”, „implikuje”,
  – przykłady operatorów: „dla każdego”, „istnieje”, „jest konieczne”, „zawsze”
- *symbole pomocnicze*, uczytelniające notację
  – przykłady: „(”, „)”, „[”, „]”.

©A. Szałas

Dlaczego „symbole funkcyjne/relacyjne” zamiast „funkcji/relacji”?

W języku naturalnym nazwy nie są nazywanymi nimi obiektami!
W logice *symbole* odpowiadają nazwom.
Symbol relacyjny/funkcyjny nie jest funkcją/relacją, ale nazwą funkcji/relacji.
Porównując z językiem naturalnym – w logice **symbol oznacza jednoznacznie określony obiekt**.

©A. Szałas

Przykłady

1. Nazwa „Jan” nie jest osobą o imieniu „Jan”.
2. Dany obiekt może mieć wiele nazw,
   – np. „Jan” oraz „ojciec Jacka” mogą oznaczać tę samą osobę.
3. Obiekt może nie mieć nazwy – np. nie dajemy odrębnej nazwy każdemu atomowi we wszechświecie.
4. Wiele różnych obiektów może mieć tę samą nazwę,
   – np. „Jan” oznacza wiele osób.
5. Pewne nazwy nie oznaczają żadnych istniejących obiektów,
   – np. „Pegaz”.

©A. Szałas

Klasyczny rachunek zdań

Bada prawdziwość zdań złożonych na podstawie prawdziwości/ fałszywości zdań składowych.

Wartości logiczne: Prawda, Fałsz
Zdania: zmienne zdaniowe $p, q, r, \ldots$, zdania złożone budowane za pomocą spójników $\neg$ (nie), $\wedge$ (i), $\vee$ (lub), $\rightarrow$ (implikuje = jeżeli ... to ...), itp.

Przykłady

$$\text{pedał środkowy wciśnięty} \longrightarrow \text{hamowanie}$$

$$\left.\begin{array}{l} \quad \text{silnik włączony} \\ \wedge\ \text{bieg włączony} \\ \wedge\ \text{prawy pedał wciśnięty} \end{array}\right\} \longrightarrow \text{jazda}$$

$$\big(\neg\text{bieg włączony}\big) \longrightarrow \big(\text{pojazd stoi} \vee \text{prędkość maleje}\big)$$

$\ldots$

Logiki trójwartościowe

Załóżmy, że prowadzony przez robota samochód zbliża się do skrzyżowania z drogą równorzędną. Powinien zadać swojej bazie danych wiedzy pytanie „czy nadjeżdża pojazd z prawej”. Jeśli otrzyma odpowiedź Prawda, powinien się zatrzymać, gdy Fałsz - jechać dalej.

Może się okazać, że w danym momencie odpowiedź na to pytanie nie jest znana (np. droga z prawej nie jest jeszcze dostatecznie dobrze widoczna). Jaka powinna być wtedy odpowiedź? Tak Prawda, jak i Fałsz są odpowiedziami błędnymi, mogącymi prowadzić do sytuacji niebezpiecznej.

Logiki trójwartościowe - cd.

Logiki trójwartościowe zostały wprowadzone przez J. Łukasiewicza w 1920 roku.

Wartości logiczne: Prawda, Fałsz, Neutralna
Zdania: zmienne zdaniowe $p, q, r, \ldots$, zdania złożone budowane za pomocą spójników $\neg$ (nie), $\wedge$ (i), $\vee$ (lub), $\rightarrow$ (implikuje = jeżeli ... to ...), itp. (tak jak poprzednio)

Inne interpretacje trzeciej wartości logicznej

- Niezdefiniowana (Nieznana: Kleene, 1952)
- Nonsens: Bočvar, 1939
- Bez znaczenia: Hallden, 1949
- i wiele innych

Przykłady (dla logiki Kleeneego)

Rozważmy formułę:

wolna prawa $\rightarrow$ jedź

Jeśli wartość logiczna zdania wolna prawa jest Nieznana, to nie można wywnioskować że wartością jedź jest Prawda (w większości semantyk praktycznego wnioskowania przyjmuje się zasadę minimalizacji wartości konkluzji i wtedy wartością logiczną zdania jedź jest Nieznana).

Rozważmy formułę:

$$\left.\begin{array}{ll} & \text{silnik włączony} \\ \wedge & \text{bieg włączony} \\ \wedge & \text{prawy pedał wciśnięty} \end{array}\right\} \to \text{jazda}$$

Jeśli wartość logiczna zadań:

silnik włączony, *jazda*

jest NIEZNANA, zaś wartość zdań

bieg włączony, prawy pedał wciśnięty

jest PRAWDA, to wartość powyższej implikacji jest NIEZNANA.

Logiki czterowartościowe

Załóżmy, że mamy do czynienia z wieloma źródłami informacji. Wówczas fakt A może mieć wartość logiczną:

- Prawda, np. gdy pewne źródła twierdzą A i żadne mu nie przeczy
- Fałsz, np. gdy pewne źródła twierdzą, ze A nie zachodzi i żadne temu nie przeczy
- Nieznana, np. gdy żadne źródło nie ma wiedzy o A
- Sprzeczność, np. gdy pewne źródła twierdzą A oraz pewne przeczą A.

Przykład

Dojeżdżając do skrzyżowania widzimy czerwone światło i policjanta sygnalizującego, że mamy przejechać, mamy do czynienia z dwoma sprzecznymi źródłami informacji:

światła sygnalizują „nie jedź"", zaś policjant „jedź".

Sprzeczność często potrafimy wyeliminować, np. poprzez „głosowanie" lub preferowanie pewnych źródeł wiedzy. Daje to możliwość sensownego wnioskowania ze sprzecznej informacji.

JAK MA SIĘ DO TEJ SYTUACJI LOGIKA KLASYCZNA?

W logice klasycznej sprzeczność jest modelowana wartością FAŁSZ, bowiem

$$p \wedge \neg p \equiv \text{FAŁSZ}.$$

Jednakże FAŁSZ implikuje każdą formułę, tak więc teorie sprzeczne są trywialne (ich konsekwencjami są wszystkie formuły), mamy bowiem

tautologię: FAŁSZ $\rightarrow q$ (dla dowolnej formuły q)

oraz regułę: na podstawie p oraz $p \rightarrow q$ wnioskuj q.

Skoro mamy sprzeczność jedź$\wedge\neg$jedź (czyli FAŁSZ) oraz wiemy, że np. $\underbrace{\text{FAŁSZ}}_{p} \rightarrow \underbrace{\text{jestem UFO}}_{q}$, zatem wnioskujemy $\underbrace{\text{jestem UFO}}_{q}$.

Logiki wielowartościowe

Współczesne logiki wielowartościowe zostały zainicjowane także pracami Łukasiewicza w 1920r. Po nim:

1. Logiki Posta (1921)
2. Logiki Gödla (1932)
3. Logiki Kleenego (1938)
4. Logika rozmyta Zadeha (1965) (tak naprawdę pewna nieskończenie wartościowa logika Łukasiewicza i Tarskiego)
5. Logika Belnapa (1977) — czterowarościowa (modelująca wielość źródeł informacji).

Co to jest wnioskowanie?

Poprawne wnioskowanie, to wnioskowanie oparte o poprawne reguły. *Poprawna* reguła to taka, w której każdy kto akceptuje jej przesłanki powinien akceptować też jej wnioski.

Aby przekonać się czy dany *argument jest poprawny*, sprawdzamy jaki jest związek między przesłankami i wnioskiem. Nie oceniamy, czy są powody do akceptowania przesłanek ale czy akceptacja przesłanek, bez względu na powody, powinna prowadzić do akceptacji wniosków.

Przykłady

1. Poprawne reguły:
   - jeśli x jest ojcem y oraz y jest rodzicem z, to x jest dziadkiem z
   - jeśli p i q jest prawdą, to p jest prawdą.
2. Niepoprawne reguły:
   - jeśli p implikuje q to q implikuje p
   - jeśli p lub q jest prawdą, to p jest prawdą.
3. czy następujące reguły są poprawne:
   - jeśli p implikuje q to nie q implikuje nie p
   - jeśli p jest prawdą, to p lub q jest prawdą?

JAK DEFINIUJEMY LOGIKI?

W logice każda formuła musi mieć określone *znaczenie* (nazywane też *interpretacją*). Znaczenie to definiuje się:

- *syntaktycznie*, poprzez pojęcie systemu wnioskowania i dowodu
- *semantycznie*, poprzez pojęcia modelu, spełnialności i prawdziwości

Podejście semantyczne

W *podejściu semantycznym* przypisujemy znaczenie („rzeczywiste obiekty”) do symboli:

- elementy z dziedziny do stałych
- zakres elementów z dziedziny do zmiennych
- funkcje do symboli funkcyjnych
- relacje do symboli relacyjnych.

Znaczenie spójników, operatorów i symboli pomocniczych jest ustalone przez daną logikę.

Przykład

Rozważmy zdanie „Jan jest podobny do ojca Jacka”.

W postaci logicznej powyższe zdania zapisalibyśmy z grubsza jako: $pod(Jan, ojc(Jacek))$, gdzie pod i ojc są odpowiednimi skrótami dla jest podobny do oraz ojciec.

Aby stwierdzić prawdziwość/fałszywość tego zdania musimy znać znaczenie:

- stałych $Jan, Jacek$
- funkcji oznaczonej symbolem ojc
- relacji oznaczonej symbolem pod.

Podejście syntaktyczne

W *podejściu syntaktycznym* przypisujemy znaczenie symbolom języka poprzez podanie *aksjomatów* i *reguł wnioskowania* (*reguł*).

- *Aksjomaty* to fakty „w sposób oczywisty prawdziwe" w danej rzeczywistości.
- *Reguły* pozwalają na wnioskowanie nowych faktów na podstawie faktów już znanych.

Aksjomaty wraz z regułami nazywamy *systemami wnioskowania*.

Przykład

Rozważmy regułę (nazywaną *modus ponens*):

jeśli	prawdziwe jest p
oraz	z prawdziwości p wynika prawdziwość q
	(tzn. p implikuje q)
to	wnioskuj, że prawdziwe jest q.

Załóżmy, że mamy aksjomaty:

Czytam dobrą książkę.
Jeśli czytam dobrą książkę, uczę się czegoś nowego.

Przyjmując

p jako „czytam dobrą książkę”,
q jako „uczę się czegoś nowego”,

mamy „p” i „p implikuje q”, stosując modus ponens uzyskujemy „q”, tzn. „uczę się czegoś nowego”.

©A. Szałas

DYSKUSJA

W semantycznym wnioskowaniu też stosujemy reguły, może w sposób bardziej ukryty. Jaka jest więc różnica?

W podejściu syntaktycznym nie interesuje nas znaczenie formuł. Transformujemy formuły czysto syntaktycznie na podstawie ich kształtu. Znaczenie jest dane przez prawdziwość/fałszywość formuł.

PRZYKŁAD

Rozważmy regułę:

jeśli osoba x jest rodzicem osoby y
to x ma więcej lat niż y.

Załóżmy, że mamy aksjomaty:

Jan jest osobą.
Ewa jest osobą.
Jan jest rodzicem Ewy.

Stosując rozważaną regułę uzyskujemy:

Jan ma więcej lat niż Ewa.

©A. Szałas

Co to jest logika? – konkluzja

Przez *logikę* rozumiemy trójkę $\langle \mathcal{T}, \mathcal{L}, \mathcal{I} \rangle$, gdzie

- $\mathcal{T}$ jest zbiorem *wartości logicznych*, np. $\mathcal{T} = \{\textsc{Prawda}, \textsc{Fałsz}\}$
- $\mathcal{L}$ jest zbiorem formuł
- $\mathcal{I}$ jest „wyrocznią” przypisującą znaczenie formułom, $\mathcal{I} : \mathcal{L} \longrightarrow \mathcal{T}$, tzn. dla każdej formuły $A \in \mathcal{L}$, wartość $\mathcal{I}(\mathcal{A})$ jest wartością logiczną.

PRZYKŁAD

Ustalmy arytmetykę liczb rzeczywistych i zdefiniujmy „wyrocznię”, m.in. mówiącą, że formuły postaci

dla każdej liczby rzeczywistej x jest prawdziwa formuła $A(x)$

mają wartość PRAWDA wttw

> dla każdej liczby rzeczywistej zastępującej x w $A(x)$, jest prawdziwa formuła $A(x)$.

Ta definicja jest wysoce niekonstruktywna!

W praktyce używa się innych technik.

Na przykład, aby wykazać, że dla każdej liczny rzeczywistej x mamy $x < x + 1$, nie sprawdzamy tej własności dla wszystkich liczb rzeczywistych, w tym np:

$$\begin{aligned} 2.5 &< 2.5 + 1 \\ \sqrt{5} &< \sqrt{5} + 1 \\ 1238 &< 1238 + 1 \ \ldots \end{aligned}$$

Raczej obserwujemy, że

1. $0 < 1$
2. dodawanie x do obu stron nierówności zachowuje tę nierówność

i uzyskujemy, że $x + 0 < x + 1$, tzn. $x < x + 1$.

META-WŁASNOŚCI

Meta-własność jest własnością logiki, a nie rzeczywistości modelowanej przez tę logikę.
Istnieją dwie istotne meta-własności wiążące podejście semantyczne i syntaktyczne, a mianowicie *poprawność* i *pełność* systemu wnioskowania względem danej semantyki.

POPRAWNOŚĆ I PEŁNOŚĆ

Załóżmy, że logika jest zdefiniowana przez semantykę $\mathcal{S}$ oraz przez system wnioskowania $\mathcal{P}$. Wówczas mówimy, że:

- system wnioskowania $\mathcal{P}$ jest *poprawny* względem semantyki $\mathcal{S}$ wttw każda formuła którą można wykazać w $\mathcal{P}$ ma wartość PRAWDA w semantyce $\mathcal{S}$,
- system wnioskowania $\mathcal{P}$ jest *pełny* względem semantyki $\mathcal{S}$ wttw każda formuła mająca wartość PRAWDA w semantyce $\mathcal{S}$ może być wykazana w systemie $\mathcal{P}$.

Podsumowanie

W czasie wykładu odpowiadaliśmy na pytania:

- co to jest modelowanie i modelowanie logiczne?
- co to jest wnioskowanie ilościowe i symboliczne?
- czym są logiki? czym jest język logiki?
- ile jest wartości logicznych?
- co to jest podejście semantyczne i syntaktyczne?
- czym jest poprawność i pełność?